OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A MATE-INFO
FEBRUARIE 2015

Problema 1:

Fie $z \in B, z = 2\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha), \alpha \in [0,\pi)$

$z - i = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2i\sin^2\alpha - i, \alpha \in [0,\pi)$ 1p

$z - i = \sin 2\alpha + i\cos 2\alpha, \alpha \in [0,\pi)$ 1p

$|z - i| = 1 \Rightarrow z \in A$, de unde rezultă că $B \subset A$ 1p

Fie $z \in A, |z - i| = 1$, $I(0,1)$, cercul $C(I,1)$, $M(z)$, $M \in C(I,1)$ 1p

$\exists\alpha \in [0;\pi), m(\prec XOM) = \alpha, OM = 2\sin\alpha$ 1p

$z = 2\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha), \alpha \in [0,\pi)$, de unde rezultă că $A \subset B$ 1p

Finalizare...1p

Problema 2:

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ 1p

$\log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab = (\log_a b + \log_a c)(\log_b a + \log_b c)(\log_c a + \log_c b)$.........1p

Argumentează că termenii sumelor din paranteze sunt pozitivi......................1p

Aplică inegalitatea mediilor $\log_a b + \log_a c \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_a c}$ 1p

$\log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab = 8\sqrt{\log_a b \cdot \log_a c} \cdot \sqrt{\log_b a \cdot \log_b c} \cdot \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}$
.........1p

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ 1p

Finalizare...1p

Problema 3:

a) $x=1 \Rightarrow f(f(1))=1$ 1p

$x=f(1) \Rightarrow f(f(f(1)))=f^{2}(1)-f(1)+1$ 1p

Obţine $(f(1)-1)^{2}=0$ 1p

Finalizare..1p

b) $g(0)=g(1)=1$ 1p

$f(f(0))=f(f(1))=1$ 1p

Finalizare..1p

Problema 4:

a) $\ln(ctgx)>0$, pentru $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ 1p

$\ln(ctgx)<0$, pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ 1p

$\ln(ctgx)=0$, pentru $x=\frac{\pi}{4}$ 1p

b) $a=\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\sin x)}, b=\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}, a-b=\frac{\ln(ctgx)\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\ln(\sin x)\cdot\ln(\cos x)}$ 1p

$a<b$, pentru $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ 1p

$a>b$, pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ 1p

$a=b$, pentru $x=\frac{\pi}{4}$ 1p